DR DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

SARADNIK
DR RADOVAN R. JANIĆ

БИБЛИОТЕКА
РИМСКА С. ЈОВАНОВИЋА

UVOD U SPECIJALNE FUNKCIJE

ČETVRTO IZDANJE

[redacted]

Naučna knjiga
BEOGRAD, 1991.

1. GENERATRISA LEGENDREOVIH POLINOMA

Posmatrajmo funkciju

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

gde je t kompleksna promenjiva. Zadržaćemo se na onoj determinaciji ove funkcije koja dobija vrednost 1 za $t=0$. Dakle, posmatraćemo funkciju G datu sa

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-1/2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{1.1}$$

za koju je $G(0)=1$.

Funkcija G ima u konačnoj t-ravni dva singulariteta. To su nule polinoma $1-2xt+t^2$, naime

$$t_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1} = x \pm i\sqrt{1-x^2}.$$

Ovi singulariteti su algebarske kritičke tačke drugog reda.

Kako je $|t_1| = |t_2| = 1$, funkcija G može se razviti u okolini tačke $t=0$ u TAYLOROV red, konvergentan u disku $|t|<1$.

Ako je $|2xt-t^2|<1$, imamo razvoj

$$\begin{aligned}(1-2xt+t^2)^{-1/2} &= \left(1-(2xt-t^2)\right)^{-1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} (2xt-t^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (2xt-t^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!\, k!} (2xt-t^2)^k.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Ako je

$$|t|\,(2|x|+|t|)<1, \tag{1.3}$$

tada je utoliko pre $|2xt-t^2|<1$, jer je $|2xt-t^2| \leq |t|\,(2|x|+|t|)$.

Kada je ispunjen uslov (1.3), u redu (1.2) mogu se proizvoljno grupisati njegovi članovi.

Uslov (1.3) je ispunjen ako je, na primer,

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad |t| < \frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad |t| < \sqrt{2}-1.$$

Koeficijent uz t^n u razvoju (1.2) jednak je koeficijentu uz t^n u razvoju

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}\, k!\, k!} (2xt-t^2)^k,$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}(n-k)!\,(n-k)!} (2xt-t^2)^{n-k}, \tag{1.4}$$

jer je $\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)$.

Traženi koeficijent uz t^n je

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}(n-k)!\,(n-k)!} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k},$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^{n}(n-k)!\,(n-k)!} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}.$$

Sumaciona promenljiva k uzima vrednosti od $k=0$ do $k=[n/2]$, jer je $\binom{n-k}{k}=0$ za $k>\left[\frac{n}{2}\right]$.

Prema tome, izveli smo formulu

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n \qquad (-1\leq x\leq 1;\ |t|<\sqrt{2}-1), \tag{1.5}$$

gde je

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-k)!} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}. \tag{1.6}$$

Kako je (1.5) TAYLOROV razvoj funkcije $t \mapsto (1-2xt+t^2)^{-1/2}$ u okolini tačke $t=0$ i kako je takav razvoj jedinstven, jer je data funkcija analitička, zaključujemo da ovaj razvoj važi za $|t|<1$, a ne samo za $|t|<\sqrt{2}-1$.

Formula (1.6) izvedena je pod pretpostavkom da je $-1\leq x\leq 1$. Ako se zanemari ova pretpostavka, formula (1.6) određuje jedan polinom koji se zove LEGENDREOV polinom. Funkcija G zove se *generatrisa* LEGENDREOVih polinoma.

Iz (1.6) sleduje

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{1.7}$$

Za $x=1$ jednakost (1.5) postaje

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)\, t^n \qquad (|t|<1),$$

odakle izlazi

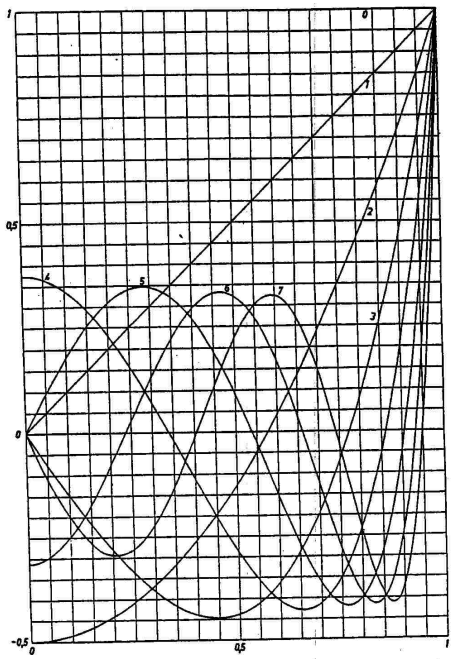
$$P_n(1) = 1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Iz (1.7) sleduje

$$P_n(-1) = (-1)^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Iz formule (1.6) dobijamo

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ neparno}). \\ \binom{-1/2}{n/2} & (n \text{ parno}). \end{cases}$$



Sl. 2. LEGENDREOVI polinomi $P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ za $n=0, 1, \ldots, 7$.

Nekoliko prvih LEGENDREovih polinoma* su:

$P_0(x)=1,$

$P_1(x)=x,$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$

$P_4(x)=\frac{1}{2^3}(35x^4-30x^2+3),$

$P_5(x)=\frac{1}{2^3}(63x^5-70x^3+15x),$

$P_6(x)=\frac{1}{2^4}(231x^6-315x^4+105x^2-5),$

$P_7(x)=\frac{1}{2^4}(429x^7-693x^5+315x^3-35x),$

$P_8(x)=\frac{1}{2^7}(6\,435x^8-12\,012x^6+6\,930x^4-1\,260x^2+35),$

$P_9(x)=\frac{1}{2^7}(12\,155x^9-25\,740x^7+18\,018x^5-4\,620x^3+315x),$

$P_{10}(x)=\frac{1}{2^8}(46\,189x^{10}-109\,395x^8+90\,090x^6-30\,030x^4+3\,465x^2-63).$

LEGENDRE je 1785. uveo u literaturu polinome P_n.

2. RODRIGUESOVA FORMULA

LEGENDREovom polinomu (1.6) daćemo sada dva nova oblika. Primenom formule

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad (n\geq r;\ n,r \text{ prirodni brojevi ili nule}),$$

dobijamo

$$\binom{n-k}{k}=\frac{(n-k)!}{(n-2k)!\,k!} \qquad (2k\leq n),$$

kao i

$$\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-k)!}\binom{n-k}{k}=\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\,\frac{1}{(n-2k)!\,k!}$$

$$=\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!\,n!}\,\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$=\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k} \qquad (2k\leq n).$$

Prema toine, formula (1.6) postaje

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}. \tag{2.1}$$

* R. und L. EGERSDÖRFER: *Formeln und Tabellen der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art von $n=1$ bis $n=20$.* Wissenschaftliche Abhandlungen, Deutsches Reich, Reichsamt für Wetterdienst, Bd. 1, № 6, 1936, 67 S.

Dokazaćemo sada da polinomu P_n možemo dati sažeti oblik

$$P_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{2.2}$$

Kako je

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2n-2k} \quad \text{i} \quad \frac{d^n}{dx^n}(x^s)=n!\binom{s}{n}x^{s-n},$$

dobijamo

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2n-2k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}n!\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}.$$

Pošto je $\binom{2n-2k}{n}=0$ za $k>\frac{n}{2}$, iz poslednje formule sleduje

$$\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}.$$

Odavde na osnovu (2.1), zaključujemo da se polinomu P_n zaista može dati oblik (2.2).

Formula (2.2) zove se RODRIGUESova formula. Ovu formulu dokazao je O. RODRIGUES 1814.

3. LEGENDREOVI KOEFICIJENTI

Za $x=\cos\theta$ leva strana definicione jednakosti LEGENDREovih polinoma

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n \qquad (-1\leq x\leq 1;\ |t|<1) \tag{3.1}$$

postaje

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=(1-te^{i\theta})^{-1/2}(1-te^{-i\theta})^{-1/2}.$$

Za $|t|<1$ važe razvoji

$$(1-te^{i\theta})^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}e^{ni\theta}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n,$$

$$(1-te^{-i\theta})^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}e^{-ni\theta}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n t^n.$$

Za $|t|<1$ takođe važi razvoj

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n t^n\right).$$

Koeficijent uz t^n u ovom razvoju je

$$\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}e^{(2k-n)i\theta}.$$

Na taj način dobijamo

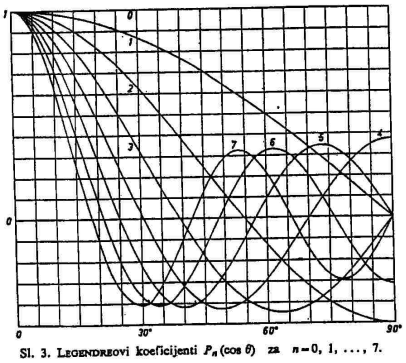
$$(3.2)\qquad (1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}e^{(2k-n)i\theta}.$$

Upoređenjem formula (3.1) i (3.2) nalazimo

$$(3.3)\qquad P_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}e^{(2k-n)i\theta}$$

Polinom $P_n(x)$ je realan i za $x=\cos\theta$ ima realnu vrednost. Stoga je

$$\begin{aligned}P_n(\cos\theta)&=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}e^{(2k-n)i\theta}\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}\cos(n-2k)\theta\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}\cos(n-2k)\theta.\end{aligned}$$



Sl. 3. LEGENDREOVI koeficijenti $P_n(\cos\theta)$ za $n=0, 1, \ldots, 7$.

Funkcije $\theta\mapsto P_n(\cos\theta)$ $(n=0, 1, \ldots)$ zovu se LEGENDREOVI koeficijenti.

Prema parnosti broja n formuli (3.3) mogu se dati oblici:

n parno: $$P_n(\cos\theta)=\binom{-1/2}{n/2}^2+2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}\cos(n-2k)\theta;$$

n neparno: $$P_n(\cos\theta)=-2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}\cos(n-2k)\theta.$$

Primenom formule (3.3) može se izvesti majorantna formula za LEGENDREOVE koeficijente. Iz (3.3) sleduje

$$\begin{aligned}|P_n(\cos\theta)|&\le\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}|\cos(n-2k)\theta|\\&\le\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}\\&=P_n(1)\\&=1.\end{aligned}$$

БИБЛИОТЕКА Марка С. Марковића

Prema tome, došli smo do majorantne formule

$$|P_n(\cos\theta)|\le 1\qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

tj.

$$(3.4)\qquad |P_n(x)|\le 1\qquad (-1\le x\le 1;\ n=0, 1, 2, \ldots).$$

Nekoliko prvih LEGENDREOVIH koeficijenata* su:

$P_0(\cos\theta)=1,$

$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$

$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2^2}(3\cos 2\theta+1),$

$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2^2}(5\cos 3\theta+3\cos\theta),$

$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{2^6}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9),$

$P_5(\cos\theta)=\frac{1}{2^7}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta),$

$P_6(\cos\theta)=\frac{1}{2^9}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50),$

$P_7(\cos\theta)=\frac{1}{2^{10}}(429\cos 7\theta+231\cos 5\theta+189\cos 3\theta+175\cos\theta),$

$P_8(\cos\theta)=\frac{1}{2^{14}}(6\,435\cos 8\theta+3\,432\cos 6\theta+2\,772\cos 4\theta+2\,520\cos 2\theta+1\,225),$

$P_9(\cos\theta)=\frac{1}{2^{15}}(12\,155\cos 9\theta+6\,435\cos 7\theta+5\,148\cos 5\theta+4\,620\cos 3\theta+4\,410\cos\theta),$

$P_{10}(\cos\theta)=\frac{1}{2^{17}}(46\,189\cos 10\theta+24\,310\cos 8\theta+19\,305\cos 6\theta+17\,160\cos 4\theta$
$+16\,170\cos 2\theta+7\,938).$

PRIMEDBA. LEGENDREOVI polinomi i koeficijenti imaju veliku primenu u teoriji potencijala, gde funkcija generatrisa ima direktnu geometrijsku interpretaciju. Posmatrajmo naelektrisanje q, koje se nalazi na z-osi u tački $z=a$ $(a>0)$. Elektrostatički potencijal naelektrisanja q u tački M je

$$(3.5)\qquad \varphi=k\frac{q}{r_1},$$

gde je $k\,(=1/(4\pi\varepsilon_0))$ konstanta.

* Videti referencu na kraju §1.

Isti izraz važi i za gravitacioni potencijal. Naime, gravitacioni potencijal u tački $z=a$, prouzrokovan jediničnom masom u tački M, iznosi $\varphi=\frac{1}{r_1}$, što je analogno jednakosti (3.5).

Izrazimo φ pomoću polarnih koordinata r i θ. Kako je, po kosinusnoj teoremi,

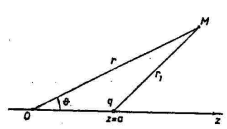
$$r_1=\sqrt{r^2+a^2-2\,ar\cos\theta},$$

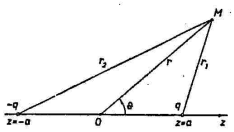
jednakost (3.5) svodi se na

$$\varphi=kq\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2\,ar\cos\theta}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{kq}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{a}{r}\cos\theta+\left(\dfrac{a}{r}\right)^2}}=\dfrac{kq}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n & (r>a),\\[2ex] \dfrac{kq}{a}\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{r}{a}\cos\theta+\left(\dfrac{r}{a}\right)^2}}=\dfrac{kq}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n & (r<a).\end{cases}$$

U primenama, u najvećem broju slučajeva, posmatra se potencijal na velikim rastojanjima ($r\gg a$).





Dosta se često sreće potencijal sistema od dva suprotna naelektrisanja, u tački $z=-a$ $(-q)$ i u tački $z=a$ $(+q)$.

Potencijal u tački M je

$$\varphi=kq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Korišćenjem kosinusne teoreme imamo

$$\varphi=kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2\,ar\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2\,ar\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{kq}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nP_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right)$$

$$=\frac{2\,kq}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}P_{2n-1}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1},$$

gde smo pretpostavili da je $r>a$.

Za velika rastojanja je

$$\varphi\sim\frac{2\,kq\,a}{r^2}P_1(\cos\theta)=\frac{2\,kq\,a}{r^2}\cos\theta.$$

4. BONNETOVA I CHRISTOFFELOVA REKURENTNA RELACIJA

Pođimo od definicione jednakosti LEGENDREOVIH polinoma

$$(1-2\,xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n\qquad(-1\leq x\leq 1;\ |t|<1). \tag{4.1}$$

Posle diferenciranja po t dobijamo

$$(x-t)\,(1-2\,xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nP_n(x)\,t^{n-1}. \tag{4.2}$$

PRIMEDBA. Red $\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n$ možemo diferencirati član po član po t i po x, jer za odgovarajući modularni red važi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|P_n(x)|\,|t|^n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}q^n\qquad(q=\text{const}),$$

pošto je $|P_n(x)|\leq 1$ i $|t|\leq q<1$.

Ako je t realna promenljiva, može se ovako rezonovati:

Diferenciranje po t i x pod znakom sumiranja dopušteno je zato što su redovi o kojima je reč uniformno konvergentni za sve vrednosti t i x za koje je

$$|t|<\sqrt{2}-1,\quad |x|\leq 1.$$

Iz (4.1) i (4.2) dobijamo

$$(x-t)\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n=(1-2\,xt+t^2)\sum_{n=1}^{+\infty}nP_n(x)\,t^{n-1}.$$

Identifikacijom koeficijenata uz t^n dobijamo

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)-(2\,n+1)\,xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \tag{4.3}$$

Kako je ovo jednakost između polinoma, ona važi za svako x, bez obzira na to što je izvedena uz uslov $-1\leq x\leq 1$.

Jednakost (4.3) izveo je O. BONNET i ona nosi njegovo ime.

Ako relaciju (4.1) diferenciramo po x, dobijamo

$$t\,(1-2\,xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n'(x)\,t^n. \tag{4.4}$$

Iz (4.1) i (4.4) nalazimo

$$t\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n=(1-2\,xt+t^2)\sum_{n=0}^{+\infty}P_n'(x)\,t^n.$$

Identifikacijom koeficijenata uz t^{n+1}, dobijamo

$$P_n(x)=P_{n+1}'(x)-2\,xP_n'(x)+P_{n-1}'(x). \tag{4.5}$$

BONNETOVA relacija (4.3) posle diferenciranja postaje

$$(n+1)\,P_{n+1}'(x)-(2\,n+1)\,xP_n'(x)+nP_{n-1}'(x)=(2\,n+1)\,P_n(x). \tag{4.6}$$

Ako iz (4.5) i (4.6) eliminišemo $P'_n(x)$, dobijamo

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{4.7}$$

Ovu relaciju izveo je E. B. CHRISTOFFEL 1856. i ona nosi njegovo ime. Polazeći od (4.7), možemo izvesti rekurentnu relaciju

$$P'_n(x)=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(2n-4k-1)P_{n-2k-1}(x). \tag{4.8}$$

Zaista iz (4.7) sleduje

$$\begin{aligned} P'_n(x)-P'_{n-2}(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x),\\ P'_{n-2}(x)-P'_{n-4}(x) &= (2n-5)P_{n-3}(x),\\ P'_{n-4}(x)-P'_{n-6}(x) &= (2n-9)P_{n-5}(x),\\ &\vdots \end{aligned}$$

Odavde, posle sabiranja, izlazi

$$P'_n(x)=(2n-1)P_{n-1}(x)+(2n-5)P_{n-3}(x)+(2n-9)P_{n-5}(x) + \cdots + \begin{cases} 3P_1(x) & (n \text{ parno}),\\ P_0(x) & (n \text{ neparno}),\end{cases}$$

a to je upravo formula (4.8) koju je trebalo dokazati.

5. LEGENDREOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Ako se iz (4.2) i (4.4) eliminiše $(1-2xt+t^2)^{-3/2}$, dobija se

$$(x-t)\sum_{n=0}^{+\infty}P'_n(x)t^n=t\sum_{n=1}^{+\infty}nP_n(x)t^{n-1}.$$

Identifikacijom koeficijenata uz t^n nalazi se

$$xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)=nP_n(x). \tag{5.1}$$

Diferenciranjem BONNETove relacije imamo

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)xP'_n(x)+nP'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x). \tag{5.2}$$

Posle eliminacije $P'_{n-1}(x)$ iz (5.1) i (5.2) dobijamo

$$P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x),$$

tj.

$$P'_n(x)-xP'_{n-1}(x)=nP_{n-1}(x). \tag{5.3}$$

Ako iz (5.1) i (5.3) eliminišemo $P'_{n-1}(x)$, dolazimo do jednakosti

$$(x^2-1)P'_n(x)-nxP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \tag{5.4}$$

Diferenciranjem ove jednakosti imamo

$$(x^2-1)P''_n(x)+(2-n)xP'_n(x)-nP_n(x)+nP'_{n-1}(x)=0. \tag{5.5}$$

Ako se iz (5.1) i (5.5) eliminiše $P'_{n-1}(x)$, nalazimo

$$(x^2-1)P''_n(x)+2xP'_n(x)-n(n+1)P_n(x)=0. \tag{5.6}$$

Na osnovu ove jednakosti zaključujemo da je LEGENDREOV polinom jedno partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0, \tag{5.7}$$

tj.

$$\frac{d}{dx}\left((x^2-1)\frac{dy}{dx}\right)-n(n+1)y=0. \tag{5.8}$$

Ova jednačina zove se LEGENDREOVA diferencijalna jednačina.

6. ORTOGONALNOST LEGENDREOVIH POLINOMA

Dokazaćemo da je

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n), \tag{6.1}$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)^2\,dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{6.2}$$

Ove formule mogu se sažeti u jednu

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad (m,n=0,1,2,\ldots). \tag{6.3}$$

(6.3) izražava činjenicu da LEGENDREOVI polinomi $P_0, P_1, P_2, \ldots$ predstavljaju ortogonalan sistem funkcija[1] na segmentu $[-1, 1]$. Može se dokazati da iz (6.3) i uslova da je P_n polinom stepena n sleduje da su polinomi P_n identični sa LEGENDREOVIM polinomima. Dakle, relacija (6.3) je karakteristična za LEGENDREOVE polinome.

Da bismo dokazali (6.1), poći ćemo od diferencijalnih jednakosti

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0,$$

$$(1-x^2)P''_n(x)-2xP'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

Množenjem prve od ovih jednakosti sa $P_n(x)$ i druge sa $P_m(x)$, posle oduzimanja dobijamo

$$(1-x^2)\left(P''_m(x)P_n(x)-P''_n(x)P_m(x)\right)-2x\left(P'_m(x)P_n(x)-P'_n(x)P_m(x)\right) + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x)=0.$$

Poslednja jednakost može se predstaviti i u obliku

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)(P'_mP_n-P'_nP_m)\right)=(n-m)(n+m+1)P_mP_n,$$

[1] Videti odeljak: *Ortogonalne funkcije*, str. 127—140.

odakle izlazi

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=(1-x^2)(P_m'P_n-P_n'P_m)\Big|_{-1}^{1}=0.$$

Odavde za $n\neq m$ sleduje formula (6.1).

Da bismo dokazali formulu (6.2), pođimo od

$$I=\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx&=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,\frac{d^{n+2}(x^2-1)^n}{dx^{n+2}}\,dx\\&\;\;\vdots\\&=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx\\&=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx.\end{aligned}$$

Kako je $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, parcijalnom integracijom nalazimo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx&=\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}(x+1)^n\Big|_{-1}^{1}-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}(x+1)^{n-1}\,dx\\&=-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}(x+1)^{n-1}\,dx\\&=\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+2}(x+1)^{n-2}\,dx\\&\;\;\vdots\\&=(-1)^n\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}\,dx\\&=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\,\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{-1}^{1}\\&=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\,\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Prema tome, imamo formulu

$$I=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{(2n)!\,n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\,\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}.$$

1. GENERATRISA LAGUERREOVIH POLINOMA

Posmatrajmo funkciju f datu sa

$$f(t)=\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}} \qquad (x \text{ realan broj}),$$

gde je t kompleksna promenljiva. Ova funkcija na konačnoj daljini ima samo jedan singularitet: $t=1$ (esencijalni singularitet). Prema tome, funkcija f može se razviti u TAYLOROV red u okolini tačke $t=0$. Ovaj red konvergira u t-ravni u disku $|t|<1$. Dakle, imamo razvoj

$$\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t|<1), \tag{1.1}$$

gde je

$$L_n(x)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{1.2}$$

L_n može se takođe predstaviti u obliku

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \tag{1.3}$$

kao što će dalje biti dokazano.

Ako se na funkciju $x\mapsto x^n e^{-x}$ primeni LEIBNIZOVA formula, tada je

$$\begin{aligned} e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) &= e^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}(x^n)}{dx^{n-k}}\,\frac{d^k(e^{-x})}{dx^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(k+1)\,x^k\right) \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

tj.

$$L_n(x)=(-1)^n\left(x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+(-1)^n n!\right).$$

L_n je polinom stepena n i naziva se LAGUERREOV polinom, a $t\mapsto f(t)$ generatrisa LAGUERREOVIH polinoma. Polinome L_n definisao je 1879. francuski matematičar E. LAGUERRE*.

---

* E. LAGUERRE: Bull. Soc. Math. France 7 (1879), 72—81, ili *Oeuvres* 1. Paris 1898, pp 428—437.

Kako za $|t|<1$ važi razvoj

$$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\frac{e^x}{1-t}e^{-\frac{x}{1-t}}$$

$$=\frac{e^x}{1-t}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{x^k}{(1-t)^k}$$

$$=e^x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{x^k}{(1-t)^{k+1}},$$

dobija se

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)=e^x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{(1-t)^{k+n+1}}\frac{x^k}{k!},$$

te je

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\Bigg|_{t=0}=e^x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)(k+2)\cdots(k+n)\frac{x^k}{k!}. \tag{1.5}$$

S druge strane je

$$x^n e^{-x}=x^n\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{n+k}}{k!},$$

odakle izlazi

$$e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=e^x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)\frac{x^k}{k!}. \tag{1.6}$$

Upoređenjem (1.5) i (1.6) zaključuje se da je

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\Bigg|_{t=0}=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

tj. ovim je dokazana formula (1.3).

Nekoliko prvih Laguerreovih polinoma su:

$L_0(x)=1,$

$L_1(x)=1-x,$

$L_2(x)=2-4x+x^2,$

$L_3(x)=6-18x+9x^2-x^3,$

$L_4(x)=24-96x+72x^2-16x^3+x^4,$

$L_5(x)=120-600x+600x^2-200x^3+25x^4-x^5,$

$L_6(x)=720-4320x+5400x^2-2400x^3+450x^4-36x^5+x^6,$

$L_7(x)=5040-35280x+52920x^2-29400x^3+7350x^4-882x^5+49x^6-x^7,$

$L_8(x)=40320-322560x+564480x^2-376320x^3+117600x^4-18816x^5+1568x^6-64x^7+x^8$

$L_9(x)=362880-3265920x+6531840x^2-5080320x^3+1905120x^4-381024x^5+42336x^6$
$-2592x^7+81x^8-x^9,$

$L_{10}(x)=3628800-36288000x+81648000x^2-72576000x^3+31752000x^4-7620480x^5$
$+1058400x^6-86400x^7+4050x^8-100x^9+x^{10}.$

2. REKURENTNE RELACIJE LAGUERREOVIH POLINOMA

Ako se po t diferenciraju obe strane identiteta (1.1), dolazi se do novog identiteta

$$e^{-\frac{xt}{1-t}}-\frac{x}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}=(1-t)^2\sum_{n=1}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Na osnovu (1.1) ovaj identitet postaje

$$(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}-x\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}=(1-t)^2\sum_{n=1}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ako se sada izjednače koeficijenti uz t^n, dolazi se do rekurentne relacije

$$L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0. \tag{2.1}$$

Ako se identitet (1.1) diferencira po x, dobija se

$$-\frac{t}{(1-t)^2}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n'(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Na osnovu (1.1) ovaj identitet postaje

$$t\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}+(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}L_n'(x)\frac{t^n}{n!}=0,$$

odakle izlazi

$$nL_{n-1}(x)+L_n'(x)-nL_{n-1}'(x)=0. \tag{2.2}$$

Ako se (2.1) diferencira dva puta po x, nalazi se

$$L_{n+1}''(x)+(x-2n-1)L_n''(x)+2L_n'(x)+n^2L_{n-1}''(x)=0.$$

Zameni li se n sa $n+1$, dobija se

$$L_{n+2}''(x)+(x-2n-3)L_{n+1}''(x)+2L_{n+1}'(x)+(n+1)^2L_n''(x)=0. \tag{2.3}$$

Iz (2.2) izlazi:

$$L_{n+1}'(x)=(n+1)\big(L_n'(x)-L_n(x)\big), \tag{2.4}$$

$$L_{n+1}''(x)=(n+1)\big(L_n''(x)-L_n'(x)\big). \tag{2.5}$$

Iz (2.4) sleduje

$$L_{n+2}'(x)=(n+2)\big(L_{n+1}'(x)-L_{n+1}(x)\big),$$

$$L_{n+2}''(x)=(n+2)\big(L_{n+1}''(x)-L_{n+1}'(x)\big).$$

Na osnovu (2.4) i (2.5) dobija se

$$L_{n+2}''(x)=(n+2)\Big((n+1)\big(L_n''(x)-L_n'(x)\big)-(n+1)\big(L_n'(x)-L_n(x)\big)\Big)$$

$$=(n+1)(n+2)L_n''(x)-2(n+1)(n+2)L_n'(x)+(n+1)(n+2)L_n(x).$$

Relacija (2.3) sada postaje

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0. \tag{2.6}$$

Diferencijalna jednačina

$$xy'' + (1-x)\,y' + ny = 0 \tag{2.7}$$

zove se LAGUERREova diferencijalna jednačina. S obzirom na (2.6) zaključuje se da je funkcija $x \mapsto L_n(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine (2.7).

PRIMEDBA. Do diferencijalne jednačine (2.7) može se doći i na sledeći način. Pođe li se od jednakosti

$$z = x^n e^{-x}, \qquad z' = x^{n-1} e^{-x}(n-x),$$

dobija se

$$xz' + (x-n)\,z = 0.$$

Ako se ova jednakost diferencira $n+1$ puta po x, nalazi se

$$xz^{(n+2)} + (x+1)\,z^{(n+1)} + (n+1)\,z^{(n)} = 0.$$

Stavi li se $z^{(n)} = u$, poslednja jednačina postaje

$$xu'' + (x+1)\,u' + (n+1)\,u = 0.$$

Ako se ovde izvrši smena

$$u = ve^{-x} \qquad (v \text{ nova funkcija}),$$

dobija se

$$xv'' + (1-x)\,v' + nv = 0.$$

Jedno partikularno rešenje ove jednačine je funkcija

$$x \mapsto v = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Dakle, drugim putem došli smo do LAGUERREove diferencijalne jednačine.

3. ORTOGONALNOST LAGUERREOVIH POLINOMA

Posmatrajmo integral

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)\, dx \tag{3.1}$$

i, ako je $m \leq n$, predstavimo ga u obliku

$$I = \int_0^{+\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx.$$

Primenimo li na integral I metod parcijalne integracije, dobijamo

$$I = L_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dL_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx.$$

Funkcija

$$x \mapsto L_m(x)\,(x^n e^{-x})^{(n-1)}$$
$$= (-1)^n e^{-x} L_m(x) \left(-(x^n) + \binom{n-1}{1}(x^n)' - \binom{n-1}{2}(x^n)'' + \cdots + (-1)^n (x^n)^{(n-1)}\right)$$

teži nuli kada $x \to +\infty$. Za $x = 0$ navedena funkcija anulira se, pa je

$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{dL_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx.$$

Primenimo li sada $m-1$ puta metod parcijalne integracije na ovaj integral, nalazimo

$$I = (-1)^m \int_0^{+\infty} \frac{d^m L_m(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})\, dx. \tag{3.2}$$

Ako je $m < n$, na poslednji integral treba ponovo primeniti metod parcijalne integracije. Na taj način dobijamo

$$I = (-1)^m \frac{d^m L_m(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} \tag{3.3}$$
$$+ (-1)^{m+1} \int_0^{+\infty} \frac{d^{m+1} L_m(x)}{dx^{m+1}} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\, dx.$$

Prvi sabirak u I (formula (3.3)) anulira se za $x = 0$ i $x \to +\infty$, a takođe i drugi sabirak jer je $\frac{d^{m+1} L_m(x)}{dx^{m+1}} = 0$.

Ako je $m = n$, tada (3.2) dobija oblik

$$I = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \frac{d^n L_n(x)}{dx^n}\, dx = n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = (n!)^2,$$

jer je

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = \Gamma(n+1) = n!$$

Prema tome, došli smo do formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n),$$
$$= (n!)^2 \qquad (m = n),$$

koja se može predstaviti i u obliku

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)\, dx = (n!)^2 \delta_{mn}. \tag{3.4}$$

Za funkcije $x \mapsto L_m(x)$ i $x \mapsto L_n(x)$ kaže se da su ortogonalne u intervalu $(0, +\infty)$ sa težinom e^{-x}.

4. PRIDRUŽENI LAGUERREOV POLINOM

Polinom, $L_n^{(k)}$ definisan sa

$$L_n^{(k)}(x) = \frac{d^k L_n(x)}{dx^k} \qquad (k \leq n), \tag{4.1}$$

naziva se *pridruženi* LAGUERREOV *polinom*.

Ako se LAGUERREOVA jednačina

$$xz'' + (1-x)\,z' + nz = 0$$

diferencira k puta po x i zatim stavi $z^{(k)} = y$, dobija se diferencijalna jednačina

$$xy'' + (k+1-x)\,y' + (n-k)\,y = 0,$$

čije je jedno partikularno rešenje funkcija $x \mapsto L_n^{(k)}(x)$.

5. PRIDRUŽENA LAGUERREOVA FUNKCIJA

U vezi sa pridruženim LAGUERREOVIM polinomom uvodi se *pridružena LAGUERREOVA funkcija*

$$x \mapsto y_{nk}(x) = e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{k-1}{2}} L_n^{(k)}(x). \tag{5.1}$$

Funkcija y_{nk} je jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$xy'' + 2y' + \left(n - \frac{k-1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{k^2-1}{4x}\right) y = 0,$$

što nije teško dokazati.

Polinomi $x \mapsto L_n^{(k)}(x)$ definisani su sa

$$(-1)^k \frac{1}{(1-t)^{k+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{L_n^{(k)}(x)}{n!}\, t^{n-k}.$$

U kvantnoj mehanici pojavljuju se integrali

$$J_{nm}^k(p) = \int_0^{+\infty} x^p\, y_{nk}\, y_{mk}\, dx \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

tj. integrali

$$J_{nm}^k(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{k+p-1}\, L_n^{(k)}(x)\, L_m^{(k)}(x)\, dx \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

S. PREŠIĆ* je dokazao formulu

$$J_{nm}^k(p) = (-1)^{n+m}\, m!\, n! \sum_{\nu=0}^{\min(m-k,\, n-k)} \binom{p-1}{m-k-\nu} \binom{p-1}{n-k-\nu} \frac{(k+p+\nu-1)!}{\nu!}, \tag{5.2}$$

gde je $p = 1, 2, \ldots$

Kao specijalan slučaj ove formule dobijaju se poznate formule

$$J_{nn}^k(1) = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}, \tag{5.3}$$

$$J_{nn}^k(2) = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}(2n-k+1), \tag{5.4}$$

$$J_{nn}^k(3) = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}(6n^2 - 6nk + k^2 + 6n - 3k + 2). \tag{5.5}$$

---

* D. S. MITRINOVIĆ: *Zbornik matematičkih problema* III. Beograd 1960, str. 269—270.

1. GENERATRISA HERMITEOVIH POLINOMA

Posmatrajmo funkciju G definisanu sa

$$G(t) = e^{2tx-t^2} \quad (x \text{ realan broj}),$$

gde je t kompleksna promenljiva. Funkcija G nema singulariteta u konačnoj t-ravni, pa se može razviti u TAYLOROV red, u okolini tačke $t=0$, koji je konvergentan za svako konačno t. Prema tome, imamo razvoj

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{1.1}$$

gde je

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x-t)^2} \Big|_{t=0} \\ &= e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \Big|_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

HERMITE* je 1864. godine definisao polinome H_n. Međutim, još 1859. ČEBIŠEV je definisao polinome H_n i stoga ih u sovjetskoj matematičkoj literaturi katkada nazivaju ČEBIŠEV-HERMITEOVI polinomi.

U § 2 biće dokazano da se H_n može izraziti u obliku

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{1.3}$$

Kao što vidimo, H_n je polinom stepena n i naziva se HERMITEOV polinom. Funkcija $t \mapsto G(t)$ naziva se funkcija generatrisa HERMITEOVIH polinoma.

Prvih jedanaest HERMITEOVIH polinoma H_n su:

$H_0(x) = 1,$
$H_1(x) = 2x,$
$H_2(x) = 4x^2 - 2,$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$
$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120,$
$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x,$
$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680,$
$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x,$
$H_{10}(x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240.$

* CH. HERMITE: Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris 58 (1864), 93—100, 266—273; 60 (1865), 370—277, 432—440, 461—466; 512—518.

Pored oznake H_n za HERMITEove polinome koristi se oznaka He_n. Polinomi H_n^*, definisani sa

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right),$$

takođe se zovu HERMITEovi polinomi.

Između $H_n(x)$ i $H_n^*(x)$ postoji veza

$$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n^*(x\sqrt{2}),$$

ili

$$H_n^*(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Prvih jedanaest polinoma H_n^* su:

$H_0^*(x) = 1,$

$H_1^*(x) = x,$

$H_2^*(x) = x^2 - 1,$

$H_3^*(x) = x^3 - 3x,$

$H_4^*(x) = x^4 - 6x^2 + 3,$

$H_5^*(x) = x^5 - 10x^3 + 15x,$

$H_6^*(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15,$

$H_7^*(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,$

$H_8^*(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,$

$H_9^*(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x,$

$H_{10}^*(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.$

2. REKURENTNE RELACIJE HERMITEOVIH POLINOMA

Ako (1.1) diferenciramo po x, dobijamo

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Na osnovu (1.1) poslednja jednakost postaje

$$2t\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!},$$

odakle izlazi

(2.1) $$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x).$$

Diferenciramo li sada (1.1) po t, nalazimo

$$2(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

tj.

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Odavde izlazi

(2.2) $$2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x).$$

Eliminacijom $H_{n-1}(x)$ iz (2.1) i (2.2) dobijamo

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + H_n'(x).$$

Posle diferenciranja ova jednakost postaje

$$2xH_n'(x) + 2H_n(x) = H_{n+1}'(x) + H_n''(x).$$

Na osnovu (2.1) poslednja jednakost dobija oblik

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Ovim je dokazano da je H_n jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

(2.3) $$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Jednačina (2.3) naziva se HERMITEova diferencijalna jednačina.

PRIMEDBA. Do (2.3) možemo doći i na sledeći način. Ako pođemo od

$$z = e^{-x^2} \quad \text{i} \quad z' = -2xe^{-x^2},$$

dobijamo

$$z' + 2xz = 0.$$

Ako ovu relaciju diferenciramo $n+1$, puta, imamo

$$z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} + 2(n+1)z^{(n)} = 0.$$

Ako ovde stavimo $z^{(n)} = u$, dobijamo

$$u'' + 2xu' + 2(n+1)u = 0.$$

Smenom $u = e^{-x^2}v$ poslednja jednačina postaje

$$v'' - 2xv' + 2nv = 0.$$

Ovim smo dokazali da je funkcija $x \mapsto (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ jedno partikularno rešenje HERMITEove jednačine.

Polazeći od diferencijalne jednačine (2.3), možemo izvesti (1.3). Pretpostavimo da jednačina (2.3) ima neko partikularno rešenje u obliku polinoma

$$P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k \qquad (a_0 \neq 0).$$

Ako zamenimo $P_k(x)$ u (2.3) i izjednačimo najstariji koeficijent dobijenog polinoma sa nulom, dobijamo $k = n$.

Prema tome, ako postoji polinomno rešenje jednačine (2.3), ono mora biti polinom stepena n. Zato u (2.3) stavimo

$$y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad (a_0 \neq 0).$$

Na taj način nalazimo

$$\sum_{k=0}^{n-2}(n-k)(n-k-1)a_k x^{n-k-2}-2\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k x^{n-k}+2n\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k}=0.$$

Ako u prvom zbiru stavimo k umesto $k+2$, dolazimo do

$$\sum_{k=2}^{n}(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2}x^{n-k}+2\sum_{k=0}^{n}ka_k x^{n-k}=0,$$

tj.

$$2a_1x^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}[(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2}+2ka_k]x^{n-k}=0.$$

Iz poslednje jednakosti sleduje

$$a_1=0 \quad \text{i} \quad a_k=-\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2k}a_{k-2} \quad (k=2,3,\ldots).$$

Na osnovu ovih formula zaključujemo da su svi koeficijenti a_r sa neparnim indeksom jednaki nuli. Koeficijente sa parnim indeksom odredićemo koristeći se dobijenom rekurentnom relacijom. Na osnovu te relacije imamo

$$a_2=-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}a_0,\quad a_4=-\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}a_2,\ldots,\quad a_{2k}=-\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2\cdot 2k}a_{2k-2}.$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n!}{(n-2k)!}\frac{1}{2^{2k}\cdot k!}a_0.$$

Konstanta a_0 je proizvoljna. Da bismo dobili baš HERMITEOV polinom, uzećemo da je $a_0=2^n$.

Dakle,

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}2^{n-2k}.$$

Prema tome, polinom $P_n(x)$ postaje

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k}=\sum_{k=0}^{[n/2]}a_{2k}x^{n-2k}=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

3. ORTOGONALNOST HERMITEOVIH POLINOMA

Za HERMITEove polinome H_m i H_n važi formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}. \tag{3.1}$$

U slučaju kada je $m\leq n$, posmatrajmo integral (3.1) u obliku

$$I_{mn}=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,dx. \tag{3.2}$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$I_{mn}=(-1)^n H_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}-(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dH_m(x)}{dx}\frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}}\,dx$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dH_m(x)}{dx}\frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Posle korišćenja relacije (2.1) nalazimo

$$I_{mn}=(-1)^{n+1}2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Ako se ponovo primeni parcijalna integracija, biće

$$I_{mn}=(-1)^{n+2}2^2m(m-1)\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-2}(x)\frac{d^{n-2}(e^{-x^2})}{dx^{n-2}}\,dx.$$

Posle m-te primene parcijalne integracije na (3.2), dobijamo

$$I_{mn}=(-1)^{n+m}2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}H_0(x)\frac{d^{n-m}(e^{-x^2})}{dx^{n-m}}\,dx. \tag{3.3}$$

Ako je $m<n$, posle ponovne primene parcijalne integracije, nalazimo

$$I_{mn}=(-1)^{n+m}2^m m!\frac{d^{n-m-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-m-1}}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}=0.$$

Ako je $m=n$, tada (3.3) postaje

$$I_{nn}=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Ovim smo dokazali formulu (3.1).

4. HERMITEOVE FUNKCIJE

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{4.1}$$

gde je $x\mapsto p(x)$ diferencijabilna funkcija.

Smenom $y=z\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\right)$ jednačina (4.1) svodi se na tzv. kanonički oblik

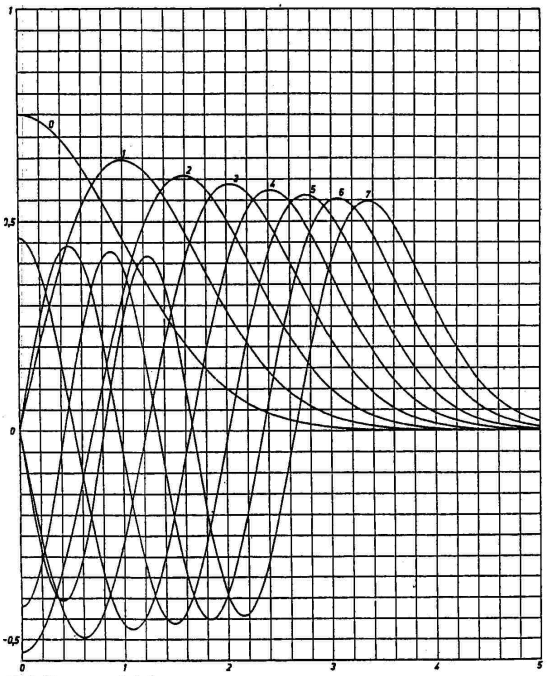
$$z''+\left(q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p(x)^2\right)z=0.$$

Za HERMITEOVU diferencijalnu jednačinu (2.3) uvodimo smenu

$$y = z \exp\left(\frac{1}{2}\int 2x\,dx\right) = z\,e^{\frac{1}{2}x^2},$$

kojom se ova jednačina svodi na

$$z'' + (2n+1-x^2)z = 0. \tag{4.2}$$



Sl. 5. HERMITEOVE funkcije

$$\varphi_n(x) = \left(n!\,2^n\sqrt{\pi}\,e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = \left(n!\,2^n\sqrt{\pi}\,e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n(x)$$

za $n = 0, 1, \ldots, 7$.

1. GENERATRISA BESSELOVIH FUNKCIJA

Posmatrajmo funkciju G definisanu sa

$$t \mapsto G(t) = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \qquad (z \text{ kompleksni broj}),$$

gde je t kompleksna promenljiva.

LAURENTOV razvoj ove funkcije u okolini tačke $t=0$ glasi

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n t^n,$$

gde je

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{G(t)}{t^{n+1}}\, dt. \tag{1.1}$$

Ovaj red konvergira za svako $t \neq 0$.

Ako u (1.1) stavimo $t = e^{i\theta}$, dobijamo

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)} e^{-n\theta i}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

Kako je $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta = 0$, dolazimo do formule

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Iz (1.2) sleduje

$$A_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(-n\theta - z\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta + z\sin\theta)\, d\theta.$$

Stavimo li ovde $\theta=\pi-\varphi$, nalazimo

$$A_{-n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\pi-n\varphi+z\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\pi\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Dakle, dokazali smo jednakost

$$A_{-n}=(-1)^n A_n. \tag{1.3}$$

Koeficijenti A_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ zovu se BESSELove funkcije indeksa n i označavaju se sa $J_n(z)$. Funkcija G naziva se generatrisa BESSELovih funkcija.

$J_n(z)$ i $J_{-n}(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$, prema (1.3), vezani su pomoću jednakosti

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z). \tag{1.4}$$

Da bismo J_n razvili u potencijalni red po z, stavimo $t=2u/z$ u (1.1). Tada integral (1.1) postaje

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\oint\limits_{|u|=\frac{1}{2}|z|}e^{u-\frac{z^2}{4u}}\frac{1}{u^{n+1}}\,du \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Primenimo li CAUCHYev stav o ostacima na navedeni krivolinijski integral, dobijamo

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{2r}}{r!\,(n+r)!}. \tag{1.5}$$

Zaista, posmatrajmo razvoje:

$$e^u=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}u^r \quad \text{i} \quad e^{-\frac{z^2}{4u}}=\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{2r}}{r!\,u^r}.$$

Ostatak funkcije $u\mapsto\frac{1}{u^{n+1}}e^{u-\frac{z^2}{4u}}$ za esencijalni singularitet $u=0$ je koeficijent uz u^n u razvoju

$$e^{u-\frac{z^2}{4u}}=\left(\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}u^r\right)\left(\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}\frac{(z/2)^{2r}}{u^r}\right).$$

Taj koeficijent dat je formulom

$$\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{1}{(r+n)!}\frac{1}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}.$$

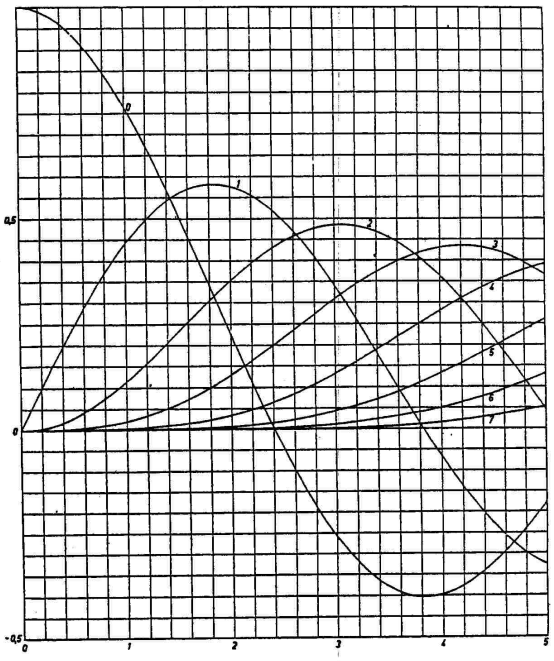
Prema tome, dobijamo

$$\operatorname*{Res}_{u=0}\left(\frac{1}{u^{n+1}}e^{u-\frac{z^2}{4u}}\right)=\sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{2r}}{r!\,(r+n)!}.$$

Ovim je dokazana formula (1.5).

Ako je z realno i $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, iz (1.2) sleduje nejednakost

$$|J_n(z)|\leq 1.$$



Sl. 7. BESSELova funkcija prve vrste $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$ za $\nu=0, 1, \ldots, 7$.

2. DIFERENCIJALNA JEDNAČINA BESSELOVIH FUNKCIJA

Pođimo od definicione jednakosti BESSELOVIH funkcija

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, t^n. \tag{2.1}$$

Diferenciranjem po t jednakosti (2.1) dobijamo

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, n t^{n-1}. \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) nalazimo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, t^n \frac{z}{2}(1+t^{-2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, n t^{n-1}.$$

Identifikacijom koeficijenata uz t^{n-1} u prethodnoj jednakosti dobijamo

$$z\left(J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)\right) = 2nJ_n(z). \tag{2.3}$$

Ako jednakost (2.1) diferenciramo po z, nalazimo

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(z)\, t^n. \tag{2.4}$$

Na osnovu (2.1) i (2.4) imamo

$$\frac{1}{2}(t-t^{-1}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(z)\, t^n. \tag{2.5}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz t^n u (2.5) nalazimo

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z). \tag{2.6}$$

Ako (2.6) pomnožimo sa z i dobijenu jednakost saberemo sa (2.3), dobijamo

$$zJ_{n-1}(z) = nJ_n(z) + zJ_n'(z); \tag{2.7}$$

ako pak (2.6) pomnožimo sa z i dobijenu jednakost oduzmemo od (2.3), dobijamo rekurentnu formulu

$$zJ_{n+1}(z) = nJ_n(z) - zJ_n'(z). \tag{2.8}$$

Ako (2.7) pomnožimo sa z^{n-1}, imamo $z^n J_n'(z) + nz^{n-1} J_n(z) = z^n J_{n-1}(z)$, što se može prikazati u obliku

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z). \tag{2.9}$$

Na sličan način, množeći (2.8) sa z^{-n-1}, dobijamo

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right) = -z^{-n} J_{n+1}(z). \tag{2.10}$$

Formule (2.3), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) i (2.10) su važne rekurentne formule.

Za $n=0$ jednakost (2.6) postaje $J_0'(z) = \frac{1}{2}\left(J_{-1}(z) - J_1(z)\right)$, tj prema (1.4),

$J_0'(z) = -J_1(z)$.

Stavljajući u jednakost (2.10) $n-1$ mesto n, ona postaje

$$\frac{d}{dz}\left(z^{1-n} J_{n-1}(z)\right) = -z^{1-n} J_n(z). \tag{2.11}$$

Ako iz (2.7) i (2.11) eliminišemo $J_{n-1}(z)$, dobijamo

$$\frac{d}{dz}\left(z^{1-n} z^{-n} \frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right)\right) = -z^{1-n} J_n(z),$$

tj. posle naznačenih diferenciranja, redom imamo

$$\frac{d}{dz}\left(z^{1-n} z^{-n}\left(nz^{n-1} J_n(z) + z^n J_n'(z)\right)\right) = -z^{1-n} J_n(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(nz^{-n} J_n(z) + z^{1-n} J_n'(z)\right) = -z^{1-n} J_n(z),$$

$$-n^2 z^{-n-1} J_n(z) + nz^{-n} J_n'(z) + (1-n) z^{-n} J_n'(z) + z^{1-n} J_n''(z) = -z^{1-n} J_n(z).$$

Sređivanjem poslednje jednakosti i množenjem sa z^{n+1}, dolazimo do jednačine

$$z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0. \tag{2.12}$$

Jednačina (2.12) je BESSELOVA diferencijalna jednačina ili diferencijalna jednačina BESSELOVIH funkcija.

3. RAZVOJ FUNKCIJE z^k U RED BESSELOVIH FUNKCIJA

Ako se stavi $t = e^{i\theta}$, formula

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z),$$

postaje

$$e^{\frac{z}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} J_n(z),$$

tj.

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} J_n(z).$$

Ako se poslednja jednakost predstavi u obliku

$$\cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\cos n\theta + i\sin n\theta) J_n(z),$$

zaključuje se da važe jednakosti

$$\cos(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\cos n\theta) J_n(z),$$

$$\sin(z\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\sin n\theta) J_n(z).$$

Kako je

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + (J_1(z)\cos\theta + J_2(z)\cos 2\theta + \cdots)$$
$$+ (J_{-1}(z)\cos\theta + J_{-2}(z)\cos 2\theta + \cdots),$$

i kako je $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, dobija se formula

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\theta. \tag{3.1}$$

Budući da je

$$\sin(z\sin\theta) = (J_1(z)\sin\theta + J_2(z)\sin 2\theta + \cdots) - (J_{-1}(z)\sin\theta + J_{-2}(z)\sin 2\theta + \cdots),$$

nalazi se

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta. \tag{3.2}$$

Redovi (3.1) i (3.2) imaju oblik FOURIEROVIH redova, i pomoću njih nalazimo

$$e^{iz\sin\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\theta + 2i\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta. \tag{3.3}$$

Za $\theta = 0$ formula (3.3) postaje

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(z). \tag{3.4}$$

Diferenciranjem po θ jednakost (3.3) dobija oblik

$$iz\cos\theta\, e^{iz\sin\theta} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} 2n J_{2n}(z)\sin 2n\theta + 2i\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)J_{2n+1}(z)\cos(2n+1)\theta. \tag{3.5}$$

Ako se ovde stavi $\theta = 0$, dobija se

$$\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)J_{2n+1}(z). \tag{3.6}$$

Diferenciranjem po θ jednakost (3.5) postaje

$$z^2\cos^2\theta\, e^{iz\sin\theta} + iz\sin\theta\, e^{iz\sin\theta} \tag{3.7}$$
$$= 2\sum_{n=1}^{+\infty} 4n^2 J_{2n}(z)\cos 2n\theta + 2i\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)^2 J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta.$$

Za $\theta = 0$ poslednja jednakost dovodi do formule

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n^2 J_{2n}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(n+1)J_{2n+2}(z)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+2)(n+1)!}{n!}J_{2n+2}(z).$$

Ako se sada diferencira (3.7) i stavi $\theta = 0$, dobija se

$$\left(\frac{z}{2}\right)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+3)(n+2)!}{n!}J_{2n+3}(z).$$

Na osnovu izloženog naslućuje se formula

$$\left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+k)(n+k-1)!}{n!}J_{2n+k}(z) \quad (k \text{ prirodan broj}).$$

Indukcijom se dokazuje da je ova formula tačna. Pri dokazu nameće se primena nekih stavova iz teorije redova.

4. BESSELOVA FUNKCIJA PROIZVOLJNOG INDEKSA

BESSELova funkcija

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

može se predstaviti u obliku

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

gde je Γ gama-funkcija.

Posmatrajmo sada funkciju J_ν, datu sa,

$$J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{+\infty}(-1)^r\frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}, \tag{4.2}$$

koja se dobija iz (4.1) kada se umesto n stavi ν, gde je ν proizvoljan kompleksan broj.

Direktnim računom proverava se da je funkcija J_ν, određena sa (4.2), jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \nu^2)w(z) = 0, \tag{4.3}$$

gde je ν ma kakva konstanta.

Formule (2.3), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) i (2.10) takođe ostaju u važnosti ako se n zameni sa ν. Međutim, formule (1.2) i (1.4) ne važe ako se u njima n zameni sa ν.

Važe takođe sledeće opštije formule:

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^k (z^\nu J_\nu(z)) = z^{\nu-k}J_{\nu-k}(z), \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^k (z^{-\nu} J_\nu(z)) = (-1)^k z^{-\nu-k}J_{\nu+k}(z), \tag{4.5}$$

gde je k prirodan broj.

Za $k = 1$ one se svode na formule (2.9) i (2.10), gde umesto n treba staviti ν. Formule (4.4) i (4.5) mogu se indukcijom dokazati.

БИБЛИОТЕКА
Мирка С. Јовановића

5. MODIFIKOVANE BESSELOVE FUNKCIJE

Generatrisa modifikovanih BESSELOVIH funkcija $z \mapsto I_n(z)$ je funkcija

$$t \mapsto e^{\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}.$$

Slično kao u § 1 dolazi se do razvoja

$$e^{\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(z)\, t^n, \tag{5.1}$$

gde je

$$I_n(z) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}. \tag{5.2}$$

LAURENTOV red (5.1) kovergira za svako $t \neq 0$ i svako z. Red (5.2) je konvergentan za svako n (n ceo broj) i određuje celu funkciju promenljive z.

Ako se u (5.1) umesto t stavi $1/t$, nalazi se

$$e^{\frac{z}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^{-n} I_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n I_{-n}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n I_n(z).$$

Odavde sleduje

$$I_n(z) = I_{-n}(z).$$

Kako je

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

dolazi se do jednakosti

$$I_n(z) = (-i)^n J_n(iz). \tag{5.3}$$

Zaista, iz formule

$$J_n(iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} i^n i^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} i^n,$$

izlazi (5.3).

Polazeći od (5.1), posle diferenciranja po t ili po z, redom se dobija

$$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} I_n(z), \qquad I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) = 2 I_n'(z). \tag{5.4}$$

Odavde izlazi

$$I_{n-1}(z) = \frac{n}{z} I_n(z) + I_n'(z), \qquad I_{n+1}(z) = -\frac{n}{z} I_n(z) + I_n'(z).$$

Posle množenja sa z^n, odnosno sa z^{-n}, nalazi se

$$z^n I_{n-1}(z) = n z^{n-1} I_n(z) + z^n I_n'(z),$$

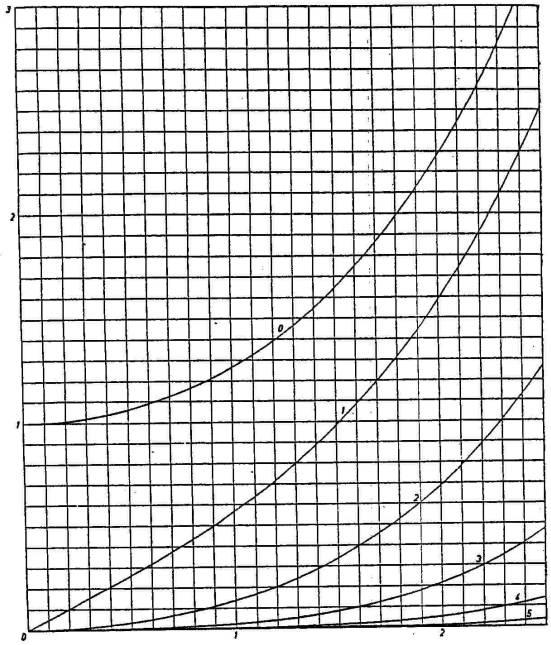
$$z^{-n} I_{n+1}(z) = -n z^{-n-1} I_n(z) + z^{-n} I_n'(z),$$

tj.

$$z^n I_{n-1}(z) = \left(z^n I_n(z)\right)', \qquad z^{-n} I_{n+1}(z) = \left(z^{-n} I_n(z)\right)'. \tag{5.5}$$

Može se proveriti da je I_n jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + n^2)\, w(z) = 0. \tag{5.6}$$



Sl. 8. Modifikovane BESSELOVE funkcije prve vrste

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad \text{za } \nu = 0, 1, \ldots, 5.$$